

Ejercicios de Análisis Matemático

Números, desigualdades y funciones elementales

1. Sea $x = y$. Entonces $x^2 = xy$, y por tanto $x^2 - y^2 = xy - y^2$, o lo que es igual, $(x + y)(x - y) = y(x - y)$, es decir, $x + y = y$. De aquí se sigue, por ser $x = y$, que $2y = y$. Haciendo $y = 1$ concluimos que $2 = 1$. ¿Dónde está el error?
2. Comprueba que $((x + 1) - \frac{1}{2}(2x + 1))^2 = (x - \frac{1}{2}(2x + 1))^2$. Por tanto, extrayendo raíces cuadradas, se deduce que $(x + 1) - \frac{1}{2}(2x + 1) = x - \frac{1}{2}(2x + 1)$, esto es $x + 1 = x$ y, por tanto, $1 = 0$. ¿Dónde está el error?
3. La desigualdad $\frac{1+x}{x-1} \geq 1$ es equivalente a $x + 1 \geq x - 1$, o lo que es igual, $1 \geq -1$. Como $1 \geq -1$ cierto, se sigue que la desigualdad anterior es válida para todo número real $x \neq 1$. Tomando, en particular, $x = -1$ obtenemos $0 = \frac{1-1}{-1-1} \geq 1$. Esto es, $0 \geq 1$. ¿Dónde está el error?
4. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifican las desigualdades siguientes.

$$\text{a) } x^2 - 5x + 9 > x, \quad \text{b) } \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0, \quad \text{c) } x^3(x-2)(x+3)^2 < 0.$$

5. Calcula para qué valores de x se verifican las siguientes desigualdades.

$$\text{a) } |x + 5| < |x - 1|, \quad \text{b) } |x - 1||x + 2| = 3, \quad \text{c) } |x^2 - x| > 1, \quad \text{d) } |x - y + z| = |x| - |z - y|$$

6. Prueba que el cuadrado es el rectángulo de máxima área para un perímetro dado y de mínimo perímetro para un área dada.
7. Calcula el dominio natural de definición de la función $f(x) = \sqrt{-\sin x} + \sqrt{16 - x^2}$.
8. Sea $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = 2x + 1$. Calcula los valores de x para los que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.
9. a) Dado $x \in \mathbb{R}$ prueba que hay un único $t \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{e^t - e^{-t}}{2} = x$.
b) Dado $x \geq 1$, prueba que hay un único $t \geq 0$ tal que $\frac{e^t + e^{-t}}{2} = x$.

Sugerencia. Lo que tienes que hacer es calcular t . La sustitución $e^t = u$ te permitirá calcular u .

10. Explica el significado de la implicación lógica: $A \implies B$.

Lecturas obligatorias. De mi libro “Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable”, que puedes descargar de mi página Web www.ugr.es/local/fjperez, la Sección 1.1.1 del Capítulo 1, titulada *Axiomas, definiciones, teoremas, lemas, corolarios*; y del Capítulo 2 la sección sin numerar titulada *“Observaciones sobre el concepto general de función y el formalismo que usamos para definir funciones”*.

Lecturas optativas. Las notas históricas al final del Capítulo 1 te resultarán interesantes. En ellas se habla de la razón áurea, de la relación entre números y medida de magnitudes y de cómo los pitagóricos hicieron un descubrimiento de extraordinaria importancia en la cultura europea. Los detalles de esta apasionante historia los encontrarás en la sección 5.2 del Capítulo 5 “Evolución del concepto de número”.

Si tienes tiempo y ganas, lee también las secciones 2.3 y 2.3.1 del Capítulo 2 “Evolución del concepto de función” y “El desarrollo del álgebra y la invención de los logaritmos”.